MAT1610: Cálculo I — Mayo 2020 (I1)

Esta guía fue hecha con ❤️ por novatos para novatos, para la estudiatón de cálculo el 13 de mayo de 2020, específicamente en preparación a la I2. Incluso si no pudiste estar en la estudiatón, esperamos que esta guía te sea útil para practicar y prepararte.

Código de Honor: "Como miembro de la comunidad de la Pontificia Universidad Católica de Chile, me comprometo a respetar los principios y normativas que la rigen. Asimismo, me comprometo a actuar con rectitud y honestidad en las relaciones con los demás integrantes de la comunidad y en la realización de todo trabajo, particularmente en aquellas actividades vinculadas a la docencia, al aprendizaje y la creación, difusión y transferencia del conocimiento."

Tienes **prohibido** el uso de cualquier clase de apuntes, libros o hojas de referencia, al menos que una sea incluida con el documento. El uso de calculadoras de cualquier tipo **no está permitido**. Para responder, **debes escribir tus respuestas por separado**, en una hoja o documento que se te debería entregar. No es aceptable entregar las respuestas en esta hoja.

Este documento **incluye una hoja de fórmulas** hacia el final. Puedes usarla como referencia.

Instrucciones Adicionales

Para esta evaluación **debes intentar responder todas las preguntas.**

Si tienes alguna duda, primero intenta llevarlo al grupo en el que estás. Si nadie puede resolver su duda, puedes solicitar ayuda desde Zoom para que vaya un tutor a ayudar. Si todos en tu grupo terminan la guía, o están muy pegados con una pregunta de desarrollo, puedes pedir la pauta de esta guía.

Facultad de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Chile

Pregunta 1

Dada la curva $2y^3 + 2x^3 + y^2 - y^5 = x^4 + x^2$, encuentre **todos** los valores de x donde la primera derivada es cero. **(5)**

- ◯ $x = \{-1, 0\}$
- ◯ $x = \{\frac{1}{2}, 1, 0\}$
- ◯ $x = \{1, 0\}$
- ◯ Ninguna de las anteriores.

Pregunta 2

Encuentre la ecuación de la recta tangente a la siguiente función en el punto pedido:

$$x^2 + 4xy + y^2 = 13, \text{ en el punto } (2, 1)$$

(5)

- ◯ $f(x) = \frac{-4}{5}x + \frac{13}{5}$
- ◯ $f(x) = \frac{5}{4}x + \frac{9}{4}$
- ◯ $f(x) = -\frac{5}{4}x + \frac{9}{4}$
- ◯ $f(x) = \frac{2}{5}x - \frac{1}{5}$

Pregunta 3

Dos autos (🚗) A y B viajan por dos calles perpendiculares desde la intersección de estas. El auto A viaja a 30 km/h y el auto B a 70 km/h ¿A qué velocidad se alejan los autos cuando A se encuentra a 3 km de la intersección? **(5)**

- ◯ $\frac{\sqrt{58}}{1160}$
- ◯ $\frac{580}{\sqrt{58}}$
- ◯ $\frac{\sqrt{58}}{580}$
- ◯ $\frac{\sqrt{1160}}{58}$

Pregunta 4

Compute el siguiente límite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$$

(5)

- ◯ 0
- ◯ 1
- ◯ 2
- ◯ ∞

Pregunta 5

Se instala una cámara de televisión a $12\,000\,\mathrm{m}$ de la base de una plataforma de lanzamiento de cohetes. (🚀) El ángulo de elevación de la cámara tiene que cambiar con la proporción correcta con el objeto de tener siempre a la vista al cohete. Asimismo, el mecanismo de enfoque de la cámara tiene que tomar en cuenta la distancia creciente de la cámara al cohete que se eleva. Suponga que el cohete se eleva verticalmente y que su rapidez es $800\,\mathrm{m/s}$ cuando se ha elevado $5000\,\mathrm{m}$. ¿Qué tan rápido cambia el ángulo de elevación de la cámara en ese momento? (Pista: usa tangente) **(5)**

- ◯ $\frac{48}{845}$
- ◯ $\frac{144}{169}$
- ◯ $\frac{4000}{13}$
- ◯ $\frac{5}{17}$

Pregunta 6

Halle la linealización de $f(x) = \sqrt[3]{1+3x}$ en $x = 0$. **(5)**

- ◯ $L(x) = x + 1$
- ◯ $L(x) = -x + 1$
- ◯ $L(x) = 3x + 1$
- ◯ $L(x) = x^3 + 1$

Pregunta 7

Compute el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}\right)$$

(5)

- ◯ $\frac{1}{2}$
- ◯ 0
- ◯ $-\infty$
- ◯ 2

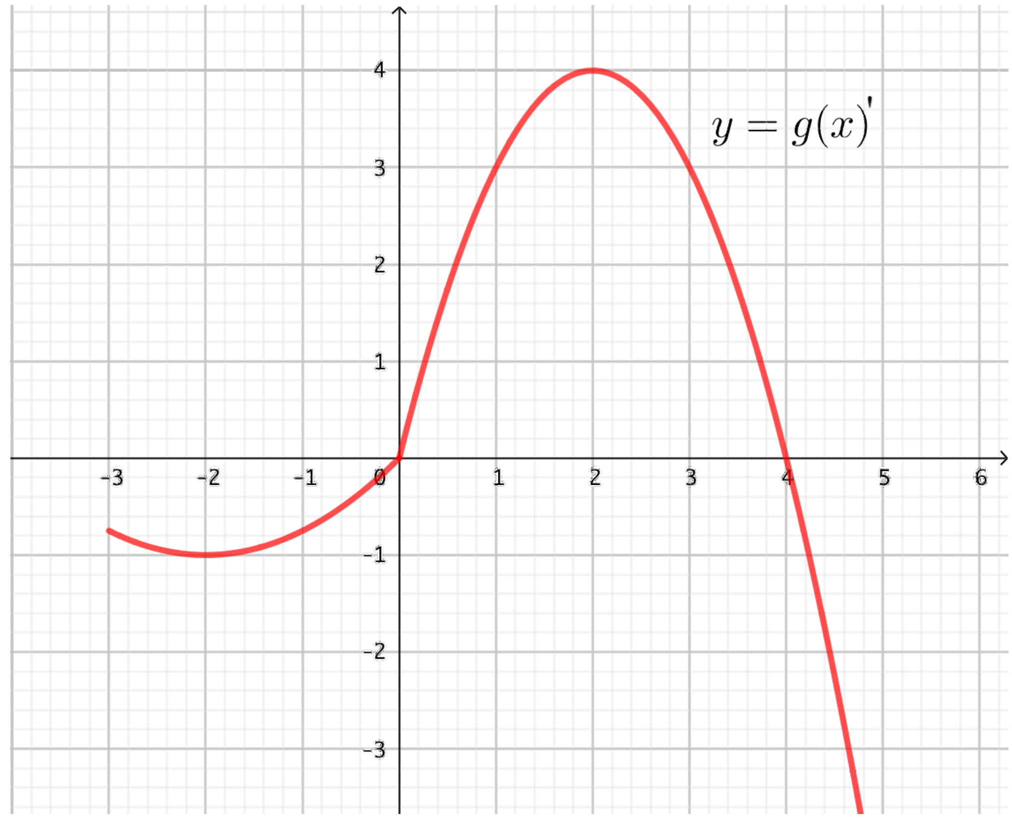

Figura 2: Función $g'(x)$.

Pregunta 8

En base a la figura 2 describiendo $g'(x)$, analice la función y responda las siguientes preguntas.

(a) Determine dónde la derivada de $g(x)$ se anula. **(20)**

(b) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $g(x)$. **(5)**

(c) Determine la concavidad de $g(x)$ en el intervalo $(-3, 5)$. **(5)**

(d) Determine los máximos y mínimos locales de $g(x)$ en el dominio del gráfico. **(5)**

Pregunta 9

Desafío: Dado $a \geq 0$, calcule el siguiente límite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - a^{\sin x}}{x^3}$$

Pista (1): Recuerda sacar las constantes del límite (opcional).
Pista (2): Si vas a la mitad del ejercicio y no te preguntas "cómo es posible", hazlo de nuevo.
Pista (3): La dificultad del ejercicio es solamente lo largo, si vas determinado es relativamente fácil! **(20)**

Pregunta 10

Código: Analice el funcionamiento de la siguiente función en Python 3:

```
def fib(n):
    a, b = 0, 1
    while a < n:
        print(a, end=' ')
        a, b = b, a + b
    print()

fib(1000)
```

(20)

FIN DE LA GUÍA

Hoja de Fórmulas

Cálculo I (MAT1610)

Mayo 2020 (interrogación)

Formulas Esenciales

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(c) = \lim_{b \to a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$$

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

$$\left(x^n\right)' = n \cdot x^{n-1}$$

$$\left(f(g(x)\right)' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$\left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Derivadas Notables

$$(\sin(x))' = \cos(x)$$

$$(\cos(x))' = -\sin(x)$$

$$(\tan(x))' = \sec^2(x)$$

$$(\sec(x))' = \sec(x)\tan(x)$$

$$(\csc(x))' = -\csc(x)\cot(x)$$

$$(\cot(x))' = -\csc^2(x)$$

$$(\sin^{-1}(x))' = (\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\cos^{-1}(x))' = (\arccos(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\tan^{-1}(x))' = (\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\sec^{-1}(x))' = (\text{arcsec}(x))' = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

$$(\csc^{-1}(x))' = (\text{arccsc}(x))' = -\frac{1}{|x|\ \sqrt{x^2-1}}$$

$$(\cot^{-1}(x))' = (\text{arccot}(x))' = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln(a) \qquad a \in \mathbb{R}$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(\log_a b)' = \frac{1}{\ln a \cdot b}$$

Análisis gráfico

$f'(x) > 0, \forall x \in]a, b[\Rightarrow f(x)$ es creciente en $[a, b]$

$f'(x) < 0, \forall x \in]a, b[\Rightarrow f(x)$ es decreciente en $[a, b]$

$f''(x) > 0, \forall x \in]a, b[\Rightarrow f(x)$ es concava hacia arriba en $[a, b]$

$f''(x) < 0, \forall x \in]a, b[\Rightarrow f(x)$ es concava hacia abajo en $[a, b]$

Punto Crítico: todo x tal que $f'(x) = 0$
Punto de Inflexión: todo x tal que $f''(x) = 0$

Máximos y Mínimos

Los máximos y mínimos locales de una función $f(x)$ son aquellos puntos donde:

1. Hay un máximo o mínimo absoluto.
2. Son los puntos críticos de la función.

Para verificar cuales son máximos o mínimos se debe ver lo siguiente:

- Si a la izquierda del punto es creciente y a la derecha es decreciente, el punto es máximo local. Por otro lado, si a la izquierda del punto es decreciente y a la derecha es creciente, el punto es mínimo local.
- Si $f''(x) > 0$, x es mínimo local, y si $f''(x) < 0$, x es máximo local.
- Para verificar cuál es el valor máximo absoluto o mínimo absoluto hay que evaluar el punto en la función.

Nueva Asíntota, Asíntota Oblicua

Se define como asíntota oblicua de la curva $y = f(x)$ como aquella recta $y = mx + n$ que cumple las siguientes propiedades:

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$n = \lim_{x \to \pm\infty} f(x) - xm$$

La asíntota oblicua de la función $f(x)$, si existe, es aquella recta de la siguiente forma:

$$y = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \cdot x + \lim_{x \to \pm\infty} f(x) - xm$$

Observación: La máxima cantidad de asíntotas oblicuas y asíntotas horizontales es 2

Regla de L'Hopital (Hecha por Bernoulli)

La regla de L'Hopital se usa para calcular límites de funciones que al calcularles el límite queda de la forma $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0{\cdot}\infty$, $\infty{-}\infty$, 0^0, 1^∞, ∞^∞ y ∞^0. Para aplicar la Regla de L'Hopital se deben transformar estas formas a $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$. Una vez transformada la función entonces se puede aplicar la Regla de L'Hopital, la cual es la siguiente:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$