Zadanie

Klaudia Soluch, IIIb

31 marca 2014

Matura CKE, poziom rozszerzony, maj 2009 (Link)

Zadanie 7. (*6pkt*)

Ciąg $(x-3, x+3, 6x+2, ...)$ jest nieskończonym ciągiem geometrycznym o wyrazach dodatnich. Oblicz iloraz tego ciągu i uzasadnij, że $\frac{S_{19}}{S_{20}} < \frac{1}{4}$, gdzie S_n oznacza sumę n początkowych wyrazów tego ciągu.

Dane:

- Ciąg geometryczny: $(x-3, x+3, 6x+2, ...)$

Szukane:

- iloraz ciągu

Dziedzina ciągu:

$$D_f = \begin{cases} x-3>0 \\ x+3>0 \\ 6x+2>0 \end{cases}$$

Z tego wynika, że:
$x > 3$

Rozwiązanie:

1. Trzy kolejne wyrazy a,b,c ciągu geometrycznego muszą spełniać warunek: $b_2 = ac$. W tym przypadku prowadzi to do równania: $(x+3)^2 = (x-3)(6x+2)$
   $x^2 + 6x + 9 = 6^x + 2x - 18x - 6$
   $5x_2 - 22x - 15 = 0$

   $\Delta = b^2 - 4ac$
   $\Delta = 484 + 300 = 784$

$\sqrt{784} = 28$

$x_1 = \frac{22-28}{10} = \frac{-3}{5}$

$x_2 = \frac{-22+28}{10} = 5$

Tylko x_2 należy do dziedziny.

2. Wyliczamy iloraz ciągu:
   $q = \frac{x+3}{x-3} = \frac{8}{2} = 4$

3. Pozostało uzasadnić podaną nierówność. Ze wzoru na sumę początkowych wyrazów ciągu geometrycznego:

$$\frac{S_{19}}{S_{20}} = \frac{2\frac{1-4^{19}}{1-4}}{2\frac{1-4^{20}}{1-4}} = \frac{1-4^{19}}{1-4^{20}}$$

4. Przekształcenie podanej w zadaniu nierówności:

$$\frac{1-4^{19}}{1-4^{20}} < \frac{1}{4}$$

$$4 - 4^{20} < 1 - 4^{20}$$

$$4 > 1$$

   Otrzymaliśmy prawdziwą nierówność, więc nierówność $\frac{S_{19}}{S_{20}} < \frac{1}{4}$ jest prawdziwa.

Odpowiedź:

Iloraz ciągu wynosi 4.