Matematicas y Finanzas

Harold Andrés Fara Villamarin y Karen Lizeth Portilla

November 15, 2014

1 Introducción

Cuando hablamos de finanzas hemos de tener muy claro lo que en si su definición nos dice, y lo que esta engloba o conlleva para así poder entender un poco mejor la relación clara existente entre las finanzas y las matemáticas. Para ayudar a despejar esta incógnita existen ciertos escritos que nos dan una luz frente a esta temática y en los cuales nos apoyamos para poder cumplir el objetivo de este documento.

Uno de estos escritos logra capturar la atención del lector iniciando con una breve pero completa descripción de uno de los elementos más importantes de las finanzas como lo es el mercado bursátil o mercado de valores y más específicamente el mercado de derivados con dos de sus productos, las opciones financieras y los contratos a plazo. Iniciando con su historia, destaca los inicios de los mercados derivados en las finanzas mundiales retomando grandes sucesos en la cadena histórica financiera como lo fue la formula de Black- Scholes [3] , de igual manera introducir el tan conocido modelo del movimiento Browniano utilizado por Louis Bachelier para modelizar los precios de los activos bursátiles.

Todo esto utilizado como un primer brochazo en el gigante lienzo financiero estructurado a partir de las matemáticas en donde como presenta Carillo los 5 elementos básicos que han estado presentes desde entonces en toda la historia.

- El uso de los modelos lognormales, anticipado por Roy[4] y Samuelson[5].
- El principio de no arbitraje que permite valorar un derivado a partir de la cartera de replicación.
- La valoración riesgo-neutro que permite referirse exclusivamente al tipo libre de riesgo y no tener en cuenta la subjetividad del agente interviniendo en el mercado.
- El marco probabilista que ha supuesto la irrupción del Cálculo Estocástico en las finanzas.
- El enfoque usando las Ecuaciones en Derivadas Parciales (EDP).

Continúa describiendo uno de los productos derivados más fácil, opción de compra europea en donde ejemplifica de una manera organizada la estructura de este producto y su función de acuerdo a distintos escenarios. Esta call europea permite beneficiarse de las posibles subidas del valor del subyacente sin correr el

[3] Modelo matemático desarrollado por Fisher Black y Myron Scholes.
[4] Modelo matemático desarrollado por Fisher Black y Myron Scholes.
[5] Modelo matemático desarrollado por Fisher Black y Myron Scholes.

riesgo de sufrir las pérdidas en que pudiera incurrir y todo ello por una inversión que representa sólo una fracción del precio de la acción (se habla entonces de apalancamiento). Por ello, las opciones son un instrumento también usado por los especuladores para multiplicar (apalancar) sus inversiones.

Durante los últimos años las investigaciones en el área financiera han tomado un papel importante, en las ciencias económicas podemos evidenciar los estudios realizados por los premios nobel Harry Markowitz[6], Merton Miller[7] y William Sharpe[8] otorgada en 1990 relacionada con selección optima de portafolios, así como los métodos de valoración de derivados de Robert Merton y Mirón Scholes en 1997.

2 Modelización y Valoración

Como se venía hablando en la introducción se seguirá tomando como ejemplo os derivados de tipo europeo, aquellos cuyos derechos sólo se pueden ejercer a su vencimiento, T, ya que están caracterizados por su función de pago. Para poder decidir cuál ha de ser la prima que hay que pagar por un determinado contrato, su valor, hay que comenzar por qué es razonable suponer sobre St. Un modelo típico para la cotización del activo, St, es el siguiente:

$$As/s = comportamientomedio + oscilacionaleatoria$$

con u el rendimiento medio anualizado del activo y o su volatilidad, que mide la variabilidad de la cotización, y donde las Xt 's toman los valores +1 O -1 con probabilidad 1/2 cada uno (misma distribución) y son independientes cuando corresponden a intervalos de tiempo disjuntos.

Aunque no se pueda calcular explícitamente ese valor esperado de Y se puede calcular un valor aproximado usando simulación Montecarlo, que consiste en:

- Se simulan evoluciones del activo acordes con la ecuación diferencial estocástica: $dS_t/S_t = rdt + dW_t$

- Para cada una de ellas se calcula el pago que se obtendría en T si la evolución del activo fuese la simulada.

- Si yi para i entre 1 y N son los resultados obtenidos entonces un valor aproximado de: $E^R N(Y) = y1 + y2 + yn/N$

3 Otros Productos

Tras los descubrimientos mencionados, empezó una era de innovación financiera en donde una serie de productos nuevos salieron al mercado bursátil generando nuevas ganancias para los inversionistas pero a su vez una exposición bastante grande a un riesgo inherente. He aquí donde las opciones y los contratos a plazo juegan un importante papel ya que se utilizan como medio de cobertura, cobertura frente a esa exposición al riesgo.

Algunos de los ejemplos más llamativos de este hecho los podemos encontrar en los derivados de riesgo de crédito. Los credit default swap (o CDS) son un

[6]Modelo matemático desarrollado por Fisher Black y Myron Scholes.
[7]Modelo matemático desarrollado por Fisher Black y Myron Scholes.
[8]Modelo matemático desarrollado por Fisher Black y Myron Scholes.

tipo de derivados usados para cubrirse del riesgo de contrapartida. Típicamente, la situación de referencia es la siguiente: la parte A está en posesión de deuda emitida por la parte B, la contrapartida. Puede tratarse, por ejemplo, de un bono, de un préstamo o de la financiación por A de una operación de B quien tiene que devolverle el dinero adelantado.

4 Gestión de Riesgos

Los nuevos servicios financieros traen consigo un riesgo de mercado y riesgo de cambio a los cuales están expuestos los inversionistas y que gracias a la innovación se puede generar un seguro por medio de este tipo de productos como opciones y contratos a plazo. Este método de protección tiene adherida una cara netamente matemática. Se trata del cálculo del capital económico o regulatorio, aquella parte de su capital que las entidades financieras han de tener invertida en instrumentos muy líquidos con el fin de poder hacer frente a posibles pérdidas por riesgo de mercado, riesgo de crédito o riesgo operacional.

El Nuevo Acuerdo de Capital (Basilea II)[9] y su próxima plasmación en normativa europea definen la manera de calcular dicho capital regulatorio, que es mediante la razón de McDonough:

$$FP/RM + RC + RO$$

donde FP designa lo que se denomina fondos propios y los sumandos del denominador representan el capital en riesgo por riesgo de mercado, de crédito y operacional. Lo que la normativa exige es que ese cociente sea al menos del 8 porciento y, como hay cierta libertad en la forma de calcular los términos RM, RC y RO, las matemáticas pueden jugar un papel relevante.

De los tres tipos de riesgos mencionados, el de mercado puede ser el más conocido aunque el menos relevante en términos de capital. El capital en riesgo por riesgo de mercado viene dado por la fórmula:

$$C = VaR + B$$

5 Teoría de Portafolios

A comienzos de los años cincuenta Harry Markowitz desarrolla la Teoría de Portafolios, una moderna teoría, que tiene como sustento la siguiente afirmación “se maximiza el rendimiento esperado a un cierto nivel de riesgo, o se minimiza el riesgo a un nivel esperado de rendimiento”, de ésta manera, se busca aquella composición ideal de la cartera que haga una máxima rentabilidad para un determinado nivel de riesgo, o un mínimo de riesgo para una rentabilidad dada.

Dicho modelo es también conocido como el modelo Media – varianza, ya que el inversor concluye que debe encontrar el equilibrio entre las ganancias y el riesgo, en función de sus preferencias personales. De ésta manera se utiliza la media como medida de la rentabilidad de la cartera y la desviación estándar como medida del riesgo de dicha rentabilidad.

[9]Modelo matemático desarrollado por Fisher Black y Myron Scholes.

5.1 Derivación analítica y matemática de la frontera eficiente

Una frontera eficiente indica los portafolios más viables que cubren las expectativas de maximizar el rendimiento para todo nivel de riesgo, o minimizar la varianza para un rendimiento esperado. Incluye las ponderaciones de los activos que componen el portafolio y que cumplan con las condiciones de maximización de rendimientos para cada nivel de riesgo establecido, teniendo en cuenta que las ponderaciones deben sumar el 100 porciento.

$$MaxE = (r_p) = w^1 E(r)$$

6 Métodos Numéricos de Aproximación para Raíces de Ecuaciones no Lineales

Con el fin de dar soluciones a los fenomenos económicos es común que los economistas realicen modelos matemáticos por medio de ecuaciones, dichas soluciones se conocen como raices o ceros de la función y, es decir, los metodos númericos estiman valores de x los cuales hacen que la ecuación se acerque a cero.

"Una función lineal se define como una igualdad en la que participan solo sumas y restas de variables a la primera potencia y representan rectas en el plano cartesiano y debe cumplir las propiedades de aditividad ($f(x+y) = f(x)+f(y)$) y homogeneidad. Su forma básica es $y = mx + b$ con m igual a la pendiente de la recta y b el intercepto con el eje y. Por lo tanto, una ecuación no lineal viola todas las propiedades anteriores.

Hablando Geométricamente la raíz de una función, es el punto donde la función $f(x)$ traspasa el eje x. Por ejemplo, en la siguiente gráfica, se tendría que $x = 1$, es decir, en este punto está la solución" (Castrillo, 2009).

6.1 Matriz de Varianza y Covarianza

6.2 Inversa de la Matriz de Varianza y Covarianza

V=

$$\begin{pmatrix}
6698.6451 & -925.757 & -882.285 & -257.523 & 947.2799 & 850.7468 & -2239.87 \\
-925.757 & 2980.0555 & -392.2022 & 755.74929 & -1353.02 & 196.9532 & -839.0113 \\
882.285 & -392.2022 & 8277.3491 & -284.5994 & 1512.865 & 225.2323 & -353.2004 \\
-257.523 & 755.74929 & -284.5994 & 1998.3586 & 857.6076 & 311.5402 & -199.0274 \\
-947.2799 & -1353.02 & -1512.865 & -857.6076 & 9634.081 & 744.5602 & 1626.214 \\
-850.7468 & -196.9532 & -225.2323 & 311.5402 & 744.5602 & 5466.891 & 680.5262 \\
-2239.87 & -839.0113 & -353.2004 & -199.0274 & 1626.21.4 & 680.5262 & 8690.6762
\end{pmatrix}$$

6.3 Rendimiento Diario deseado por el Inversionista

0.00055856

6.4 Vector de Rendimientos Medios

$$\begin{bmatrix} 0.000804783 \\ 0.001330008 \\ 0.001439169 \\ 0.001133459 \\ 0.000927916 \\ -0.00099791 \\ 0.000133543 \end{bmatrix}$$

6.5 Vector Unitario

I=

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e =

$$\begin{bmatrix} 0.0008048 & 0.0133 & 0.0014392 & 0.0011335 & 0.000998 & 0.0001335 \end{bmatrix}$$

I=

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

6.6 Multiplicadores de Lagrange

En los problemas de optimización, el método de los multiplicadores de Lagrange, llamados así en honor a Joseph Louis Lagrange[9], es un procedimiento para encontrar los máximos y mínimos de funciones de múltiples variables sujetas a restricciones.

$$0.005510046 = y = B - AE(r_p)/D$$

$$0.00005370 = y = CE(r_p) - A/D$$

6.7 Vector de Participaciones

0.04446453

0.01444145

0.29879711

0.08715151

0.15991142

0.20009523

0.19513875

$W_p = yV^-1e + yV^-1 =$

[9]Modelo matemático desarrollado por Fisher Black y Myron Scholes.

EMPRESA	MEDIA	VARIANZA
ARGOS	0.000804783	0.000211429
SURAMERICANA	0.001330008	0.000481856
BAVARIA	0.001439169	0.000138266
CARULLA	0.001133459	0.000573546
CHOCOLATES	0.000927916	0.00014459
EXITO	-0.00099791	0.000195738
CARIBE	0.000133543	0.000154934
IGBC	0.001090361	8.06353E-05

6.8 Varianza de Portafolio

$$w^1 VW = 0_1^2 = 0.0000703751$$

Este valor de varianza corresponde a la varianza minima del portafolio frontera, de acuerdo al rendimiento 0.00055856 exigido por el inversionista, sin considerar activo de riesgo en la cobertura de su crédito.

7 Bibliografía

@ARTICLEAlfonso2010a, author = M. Alfonso and B. Bernardo and C. Carlos and D. Domingo, title = El problema de los gatos y los perros, journal = Mascotas, year = 2010, volume = 50, pages = 112-115

@ARTICLEAlfonso2010b, author = M. Alfonso and M. Marta and N. Nuria, title = Mi viaje a EEUU, journal = Revista de viajes, year = 2010, volume = 14, pages = 50-56

@ARTICLEPatricio2011, author = A. Patricio, title = Una estrella rosa en el fondo del mar, journal = El mar, year = 2011, volume = 3, pages = 1071-1090

@ARTICLEZacarias2009, author = R. Zacarias and G. Graciela, title = ¿Cuál te gusta más?, journal = Flores, year = 2009, volume = 5, pages = 45-49

@bookKnuth, author="Donald E. Knuth", title="The TeXbook", publisher="Addison–Wesley", year=1984,