LABORATORIO 3

Juan Sebastian Diaz, Javier Figueredo, Jeison Monroy

June 29, 2016

1 Introduccion

Se sabe que para la aproximacion del polinomio de taylor de funciones de una variable se puede generalizar para una funcion de dos variables, donde la linealizacion de una funcion es $L(x,y) = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a)f_y(a,b)(y-b)$, con respecto a esto se verificara que $f(x,y) = Q(x,y)$ y se determinara polinomios de Taylor de primer y segundo grado.

2 Objetivos

Descomponer una superficie difrenciable dada en sus correspondientes superficies polinomicas tangentes.

- Linealizar una superficie diferenciable dada de dos variables independientes, en un punto dado.
- Aproximar cuadraticamente una superficie dada segun condiciones dadas.
- Comprender que la aproximacion cuadratica reduce el error de aproximacion, respecto a la correspondiente linealizacion

3 Problemas

3.1

$$Q(x,y) = F(a,b) + F_x(a,b)(x-a) + F_Y(a,b)(y-b) + \frac{1}{2}F_x x(a,b)((x-a)^2) + F_x y(a,b)(x-a)(y-b) + \frac{1}{2}F_y y(a,b)((y-b)^2)$$

por tanto

$$Q_x(x,y) = F_x(a,b) + \frac{1}{2}F_x x(a,b)(2)(x-a) + F_x y(a,b)(y-b)$$

$$Q_x(x,y) = F_x(a,b) + F_x x(a,b)(x-a) + F_x y(a,b)(y-b)$$

$$Q_x(a,b) = F_x(a,b) + F_x x(a,b)(a-a) + F_x y(a,b)(b-b)$$

$$Q_x(a,b) = F_x(a,b)$$

$$Q_y(x,y) = F_y(a,b) + F_x y(a,b)(x-a) + F_y y(a,b)(y-b)$$

$$Q_y(a,b) = F_y(a,b) + F_x y(a,b)(a-a) + F_y y(a,b)(b-b)$$

$Q_y(a,b) = F_y(a,b)$

En la derivada de segundo orden parcial

$Q_xx(x,y) = \frac{d}{dx}[F_x(a,b) + F_xx(a,b)(x-a) + F_xy(a,b)(y-b)] = F_xx(a.b)$

$Q_xx(a,b) = F_xx(a,b)$

$Q_xy(x,y) = \frac{d}{dy}[F_x(a,b) + F_xx(a,b)(x-a) + F_xy(a,b)(y-b)] = F_xy(a,b)$

$Q_xy(a,b) = F_xy(a,b)$

$Q_yy = \frac{d}{dy}[F_y(a,b) + F_xy(a,b)(x-a) + F_yy(a,b)(y-b)] = F_yy(a,b)$

$Q_yy(a,b) = F_yy(a,b)$

3.2

$f(x,y) = e^{(-x^2-y^2)}$

$f_x(x,y) = -2xe^{(-x^2+y^2)}$

$f_xx(x,y) = 4x^2 - 2e^{(-x^2-x^2)}$

$f_y(x,y) = -2ye^{(-x^2+y^2)}$

$f_yy(x,y) = 4y^2 - 2(e)^{((-x)^2-(y)^2)}$

$f_xy(x,y) = (4yx)(e^{(-(x^2)-(y^2))})$

ahora hallamos L

$L(x,y) = f(0,0) + f_x(0,0)(x-0) + f_y(0,0)(y-0)$

$f(0,0) = 1, f_x(0,0) = 0, f_y(0,0) = 0$

$L(x,y) = 1$

$Q(x,y) = L(x,y) + \frac{1}{2}L_xx(0,0)((x-0)^2) + L_xy(0,0)(x-0)(y-0) + L_yy(0,0)\frac{1}{2}((y-0)^2)$

$L_xx(0,0) = -2, L_xy(0,0) = 0, L_yy(0,0) = -2$

$Q(x,y) = 1 + \frac{1}{2}(-2(x)^2) + \frac{1}{2}(-2(y)^2)$

$Q(x,y) = 1 - (x)^2 - (y)^2$

ver figura 1

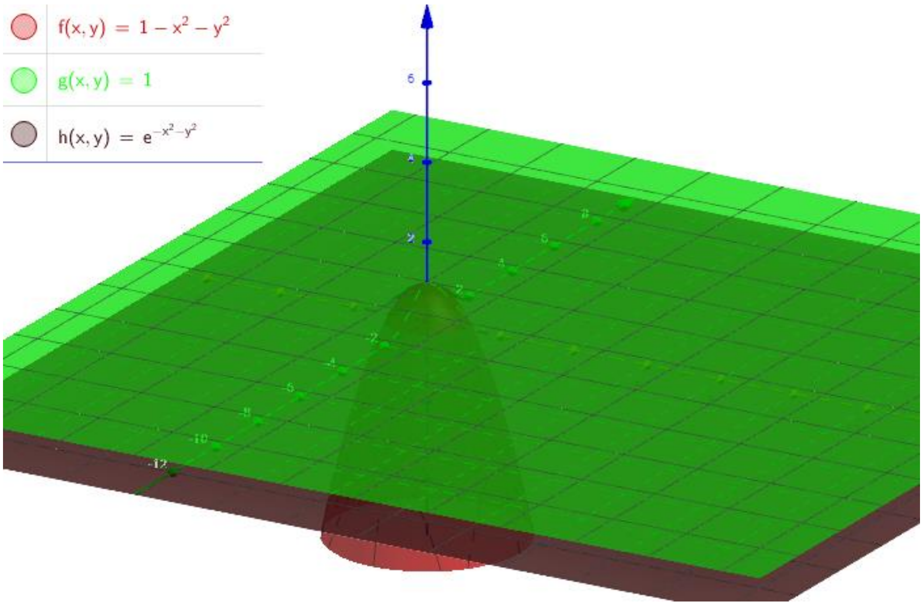

Figure 1:

3.3

$f(x,y) = xe^y$

$f_x(x,y) = e^y$

$f_x x(x,y) = 0$

$f_y(x,y) = xe^y$

$f_y y(x,y) = ye^y$

$f_x y(x,y) = e^y$

$L(x,y) = f(1,0) + f_x(1,0)(x-1) + f_y(1,0)(y-0)$

$f(1,0) = 1, f_x(1,0) = 1, f_y(1,0) = 1$

$L(x,y) = x + y$

$Q(x,y) = L(x,y) - f_x y(1,0)(x-1) + \frac{1}{2} f_x x(1,0)(x-1) + \frac{1}{2} f_y y(1,0)(y-0)^2$

$Q(x,y) = x + xy + x$

entonces para el minimo local

$f(0.9, 0.1) = 0.9e^{0.1}$

$L(0.9, 0.1) = 0.9 + 0.1$

$Q(0.9, 0.1) = \frac{1}{2}(0.1)^2 + (0.9)(0.1) + 0.9$

ver figura 2

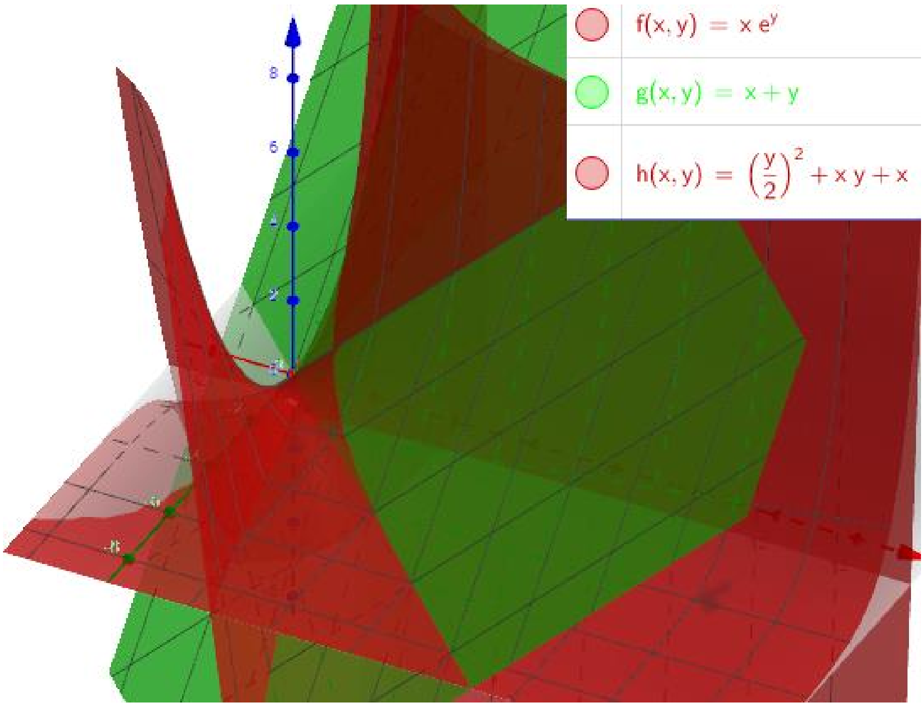

Figure 2:

3.4

completando cuadrados obtenemos

$f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 = a[x^2 + \frac{b}{a}xy + \frac{c}{a}y^2]$

$f(x,y) = a[x^2 + \frac{b}{a}xy + \frac{by}{2a} - (\frac{by}{2a}y)^2 + \frac{c}{a}y^2]$

$f(x,y) = a[(x + \frac{by}{2a})^2 - \frac{b^2y^2}{4a^2} - (\frac{cy^2}{a})]$

$f(x,y) = a[(x + \frac{by}{2a})^2 - \frac{(b^2+4ac)y^2}{4a^2}]$

$f(x,y) = a[(x + \frac{by}{2a})^2 - \frac{Dy^2}{4a^2}]$

si posee el minimo

sea $D = (-b^2 + 4ac)$

si $D > 0$

si $a > 0$

como $(\frac{Dy^2}{4a^2}) > 0$ y $(x + \frac{by}{2a})^2) > 0$ y $a > 0$

entonces

$f(x,y) > 0 = f(0,0)$ como es la imagen mas pequeña (0,0) es un minimo pero tiene maximo local si $D > 0$ y $a < 0$

como $(\frac{Dy^2}{4a^2}) > 0$ y $(x + \frac{by}{2a})^2) > 0$ y $a < 0$

entonces

$f(x, y) = a[(x + \frac{by}{2a})^2 - \frac{Dy^2}{4a^2}] < 0 = f(0, 0)$ como es la imagen mayor es un minimo respecto a los otros (x,y)

y si fuera punto de silla podria

si $D < 0$

$T = F_{xx}F_{yy} - (F_{xy})^2$

si $T < 0$ es una silla

$F_x = a[2(x + \frac{by}{2a})] = 2ax + by$

$F_{XX} = 2a$

$[bx + \frac{b^2y}{2a} - (\frac{Dy}{2a^2})]$

$\frac{b^2}{2a} + \frac{D}{2a^2}$

$F_{xy} = b$

$T = [2a][\frac{b^2}{2a} + \frac{D}{2a^2}] - [b^2]$

$T = \frac{D}{a}$

como $D < 0$ $T < 0$ es punto de silla en (0,0)

3.5

$Q(x, y) = f(0, 0) + f_x(0, 0)(x - 0) + f_y(0, 0)(y - 0) + \frac{1}{2}f_{xx}(0, 0)(x - 0)^2 + f_{xy}(0, 0)(x - 0)(y - 0) + \frac{1}{2}f_{yy}(0, 0)y^2$

$= \frac{1}{2}f_{xx}(0, 0)x^2 + f_{xy}(0, 0)xy + \frac{1}{2}f_{yy}(0, 0)y^2$

segun esto se ajusta la funcion a 4

$a = \frac{1}{2}f_{xx}(0, 0)$

$b = f_{xy}(0, 0)$

$c = \frac{1}{2}f_{yy}(0, 0)$

por esto Q es un paraboloide que tiene maximo local, minimo local y punto de silla en (0,0), entonces

$D = 4ac - b^2 = f_{xx}(0, 0)f_{yy}(0, 0) - (f_{xy}(0, 0))^2$

si $D > 0 y a = \frac{1}{2}f_{xx}(0, 0) > 0$

$f_{xx}(0, 0) > 0$ por lo tanto (0,0) es un minimo local si $D > 0$ y $a = \frac{1}{2}f_{xx}(0, 0) < 0$

$f_{xx}(0, 0) < 0$ por lo tanto (0,0) es un maximo local si $D < 0$

$(0,0)$ es un punto de silla

y por ultimo se refiere a f como

como f(x,y)=Q(x,y) en cercania de (0,0) en el literal b) $D = f_{xx}(0,0)f_{yy}(0,0) - (f_{xy}(0,0))^2$

si $D > 0$ y $f_x x(0,0) > 0$

(0,0) es un minimo local de f si $D > 0$ y $f_{xx}(0,0) < 0$

(0,0) es un maximo local de f si $D < 0$

(0,0) es un punto de silla f

4 Conclusiones

Por tanto en este laboratorio logramos concluir que para una funcion de dos variables con dominio en todos los reales, donde [a,b] E D, es identificado como la aproximacion lineal de la funcion de dos variables en el punto (a.b) en la funcion lineal. La interpretacion de la grafica de la linealizacion de la funcion de dos variables en el punto (a,b), es el plano tangente tocando la fucion de dos variales en el punto dado (a,b), dado que es la proximidad en el punto dado el valor en la funcion es aproximado al polinomio de primer grado, permitiendo que la funcion de dos variables estara muy cerca a sus funciones polinomiales de n grados.