# Formas Quadráticas

Egmon Pereira

CEFET/MG – Unidade Timóteo

18 de Junho de 2016

# Definição de Formas Quadráticas

# Definição de Formas Quadráticas



- Forma Linear:

# Definição de Formas Quadráticas



- Forma Linear:

$$a_1, a_2, \ldots a_n$$

# Definição de Formas Quadráticas



- Forma Linear:

$$a_1, a_2, \ldots a_n$$

$$x_1, x_2, \ldots x_n$$

# Definição de Formas Quadráticas



- Forma Linear:

$$a_1, a_2, \ldots a_n$$

$$x_1, x_2, \ldots x_n$$

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$$

# Definição de Formas Quadráticas



- Forma Linear:

$$a_1, a_2, \dots a_n$$

$$x_1, x_2, \dots x_n$$

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$$

Todas as variáveis estão numa forma *linear*, na primeira potência e não existem produtos de variáveis.

# Definição de Formas Quadráticas



- Forma Quadráticas:

# Definição de Formas Quadráticas

- Forma Quadráticas:

a) Termos Mistos:

# Definição de Formas Quadráticas



- Forma Quadráticas:

a) Termos Mistos:

$$a_k x_i x_j$$

# Definição de Formas Quadráticas



- Forma Quadráticas:

a) Termos Mistos:

$$a_k x_i x_j$$

$$a_1 x_1^2, a_2 x_2^2, \ldots a_n x_n^2$$

# Definição de Formas Quadráticas



- Forma Quadráticas:

a) Termos Mistos:

$$a_k x_i x_j$$

$$a_1 x_1^2, a_2 x_2^2, \ldots a_n x_n^2$$

Combinando os termos $x_i x_j$ com $x_j x_i$ evitamos duplicação desses termos e assim teremos:

# Definição de Formas Quadráticas



- Forma Quadráticas:

a) Termos Mistos:

$$a_k x_i x_j$$
$$a_1 x_1^2, a_2 x_2^2, \ldots a_n x_n^2$$

Combinando os termos $x_i x_j$ com $x_j x_i$ evitamos duplicação desses termos e assim teremos:

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + \cdots + a_n x_n^2 \tag{1}$$

# Definição de Formas Quadráticas

## Forma Quadrática arbitrária de $R^3$:

$$a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 + 2a_4x_1x_2 + 2a_5x_1x_3 + 2a_6x_2x_3 \quad (2)$$

Expressando (1) e (2) como Matriz, temos:

# Definição de Formas Quadráticas



Expressando (1) e (2) como Matriz, temos:

$$a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + 2a_3x_1x_2 \quad = \quad \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ a_3 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

# Definição de Formas Quadráticas



Expressando (1) e (2) como Matriz, temos:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ a_3 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \mathbf{X}^T A \mathbf{X} \qquad (3)$$

# Definição de Formas Quadráticas



## Em $R^3$:

$$a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 + 2a_4x_1x_2 + 2a_5x_1x_2 + 2a_6x_2x_3 = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_4 & a_5 \\ a_4 & a_2 & a_6 \\ a_5 & a_6 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (4)$$

**Nota:**

Observe que a matriz **A** nessas fórmulas é simétrica e qeu suas entradas na diagonal são os coeficientes dos termos quadrados e que suas entradas fora da diagonal são a metade dos coeficientes dos termos mistos.

# Definição de Formas Quadráticas



$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \color{red}{a_1} & a_4 & a_5 \\ a_4 & \color{red}{a_2} & a_6 \\ a_5 & a_6 & \color{red}{a_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

# Definição de Formas Quadráticas



$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_4 & a_5 \\ a_4 & a_2 & a_6 \\ a_5 & a_6 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 + 2a_4x_1x_2 + 2a_5x_1x_2 + 2a_6x_2x_3 \quad (5)$$

# Definição de Formas Quadráticas



$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_4 & a_5 \\ a_4 & a_2 & a_6 \\ a_5 & a_6 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

# Definição de Formas Quadráticas





$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_4 & a_5 \\ a_4 & a_2 & a_6 \\ a_5 & a_6 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 + 2a_4x_1x_2 + 2a_5x_1x_2 + 2a_6x_2x_3$$

# Definição de Formas Quadráticas

Em geral, se **A** é uma matriz simétrica *nxn* e **x** é um vetor-coluna $nx1$ de variáveis, então:

$$Q_A(\mathbf{x}) = X^T AX \tag{6}$$

# Definição de Formas Quadráticas





**Quando for conveniente, (6) pode ser expressa em notação de produto escalar como:**

$$Q_A(\mathbf{x}) = X^T A X$$

# Definição de Formas Quadráticas



**Quando for conveniente, (6) pode ser expressa em notação de produto escalar como:**

$$
\begin{aligned}
Q_A(\mathbf{x}) &= X^T A X \\
&= X^T (AX)
\end{aligned}
$$

# Definição de Formas Quadráticas



**Quando for conveniente, (6) pode ser expressa em notação de produto escalar como:**

$$
\begin{aligned}
Q_A(\mathbf{x}) &= X^T A X \\
&= X^T(AX) \\
&= X \cdot AX
\end{aligned}
$$

# Definição de Formas Quadráticas



Quando for conveniente, (6) pode ser expressa em notação de produto escalar como:

$$
\begin{aligned}
Q_A(\mathbf{x}) &= X^T A X \\
&= X^T (AX) \\
&= X \cdot AX \\
Q_A(\mathbf{x}) &= AX \cdot X \qquad (7)
\end{aligned}
$$

# Definição de Formas Quadráticas



Nos casos em que **A** é uma matriz diagonal, a forma quadrática $Q_A$ não tem termos mistos, logo, a matriz *nxn* fica:

$$Q_A(\mathbf{x}) \;=\; X^T I X$$

# Definição de Formas Quadráticas

Nos casos em que **A** é uma matriz diagonal, a forma quadrática $Q_A$ não tem termos mistos, logo, a matriz *nxn* fica:

$$\begin{aligned} Q_A(\mathbf{x}) &= X^T I X \\ &= X^T X \end{aligned}$$

# Definição de Formas Quadráticas



Nos casos em que **A** é uma matriz diagonal, a forma quadrática $Q_A$ não tem termos mistos, logo, a matriz *nxn* fica:

$$\begin{aligned} Q_A(\mathbf{x}) &= X^T I X \\ &= X^T X \\ &= X \cdot X \end{aligned}$$

# Definição de Formas Quadráticas



Nos casos em que **A** é uma matriz diagonal, a forma quadrática $Q_A$ não tem termos mistos, logo, a matriz *nxn* fica:

$$
\begin{aligned}
Q_A(\mathbf{x}) &= X^T I X \\
&= X^T X \\
&= X \cdot X \\
&= ||X||^2
\end{aligned}
$$

# Definição de Formas Quadráticas



Nos casos em que **A** é uma matriz diagonal, a forma quadrática $Q_A$ não tem termos mistos, logo, a matriz *nxn* fica:

$$\begin{aligned} Q_A(\mathbf{x}) &= X^T I X \\ &= X^T X \\ &= X \cdot X \\ &= ||X||^2 \\ Q_A(\mathbf{x}) &= x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \end{aligned} \tag{8}$$

# Definição de Formas Quadráticas

E se **A** tem entradas diagonais $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$; então:

$$Q_A(\mathbf{x}) = X^T A X$$

# Definição de Formas Quadráticas





E se **A** tem entradas diagonais $\lambda_1$, $\lambda_2$, ... ,$\lambda_n$; então:

$$Q_A(\mathbf{x}) = X^T A X$$

$$Q_A(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

# Definição de Formas Quadráticas



E se **A** tem entradas diagonais $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$; então:

$$
\begin{aligned}
Q_A(\mathbf{x}) &= X^T A X \\
Q_A(\mathbf{x}) &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} \\
Q_A(\mathbf{x}) &= \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2 \qquad (9)
\end{aligned}
$$

# Exemplo 01



Expresse a Forma Quadrática em notação Matricial $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$, com $\mathbf{A}$ simétrica.

$$2x^2 + 6xy - 5y^2$$

# Exemplo 01

Expresse a Forma Quadrática em notação Matricial $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$, com $\mathbf{A}$ simétrica.

$$2x^2 + 6xy - 5y^2 \;=\; \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}$$

# Exemplo 01



Expresse a Forma Quadrática em notação Matricial $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$, com $\mathbf{A}$ simétrica.

$$2x^2 + 6xy - 5y^2 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$$

# Exemplo 01

Expresse a Forma Quadrática em notação Matricial $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$, com $\mathbf{A}$ simétrica.

$$2x^2 + 6xy - 5y^2 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

**Três problemas que ocorrem na aplicação de Formas Quadráticas:**

1 - Se $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ é uma *FQ* de $\mathbf{R}^2$ ou $\mathbf{R}^3$, que tipo de curva ou superfície é representada pela equação $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = k$?

# Mudanças de Variáveis em Formas Quadráticas



**Três problemas que ocorrem na aplicação de Formas Quadráticas:**

2 - Se $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ é uma $FQ$ de $\mathbf{R}^n$, que condições deve satisfazer $A$ para garantir que $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ tenha valores positivos para $\mathbf{x} \neq 0$?

# Mudanças de Variáveis em Formas Quadráticas



**Três problemas que ocorrem na aplicação de Formas Quadráticas:**

3 - Se $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ é uma $FQ$ de $\mathbf{R}^n$, quais são os valores máximo e mínimo da $FQ$ com $x$ condicionado a satisfazer $||x|| = 1$?

Vamos responder apenas 1 e 2[1]

**Simplificando $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ com substituição, temos:**

$$\mathbf{x} = P\mathbf{y} \tag{10}$$

# Mudanças de Variáveis em Formas Quadráticas

**Simplificando $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ com substituição, temos:**

$$\mathbf{x} = P\mathbf{y} \tag{10}$$

- Se $P$ é invertível, então (10) é denominada uma **Mudança de Variáveis**

# Mudanças de Variáveis em Formas Quadráticas



**Simplificando $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ com substituição, temos:**

$$\mathbf{x} = P\mathbf{y} \tag{10}$$

- Se $P$ é invertível, então (10) é denominada uma **Mudança de Variáveis**
- Se $P$ é ortogonal, então (10) é denominada uma **Mudança de Variável Ortogonal**

# Mudanças de Variáveis em Formas Quadráticas



$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdot & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

# Mudanças de Variáveis em Formas Quadráticas



$$\begin{aligned}
\mathbf{x}^T A\mathbf{x} &= \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdot & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \\
\mathbf{y}^T D\mathbf{y} &= \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2
\end{aligned}$$

**Teorema** dos Eixos Principais

Se $A$ é uma matriz simétrca $nxn$, então existe uma mudança de variáveis ortogonal que transforma a Forma Quadrática $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ em $\mathbf{y}^T D\mathbf{y}$ sem termos mistos. Especificamente, se $P$ diagonaliza ortogonalmente $A$, então a mudança de variáveis $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ na $FQ$ fica:

# Mudanças de Variáveis em Formas Quadráticas



## **Teorema** dos Eixos Principais

Se $A$ é uma matriz simétrca $nxn$, então existe uma mudança de variáveis ortogonal que transforma a Forma Quadrática $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ em $\mathbf{y}^T D\mathbf{y}$ sem termos mistos. Especificamente, se $P$ diagonaliza ortogonalmente $A$, então a mudança de variáveis $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ na $FQ$ fica:

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = \mathbf{y}^T D\mathbf{y}$$

# Mudanças de Variáveis em Formas Quadráticas





**Teorema** dos Eixos Principais

Se $A$ é uma matriz simétrca $nxn$, então existe uma mudança de variáveis ortogonal que transforma a Forma Quadrática $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ em $\mathbf{y}^T D\mathbf{y}$ sem termos mistos. Especificamente, se $P$ diagonaliza ortogonalmente $A$, então a mudança de variáveis $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ na $FQ$ fica:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}^T A\mathbf{x} &= \mathbf{y}^T D\mathbf{y} \\
\mathbf{x}^T A\mathbf{x} &= \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2
\end{aligned}
$$

**Teorema** dos Eixos Principais

Na qual $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ são os autovalores de $A$ associados aos autovetores que constituem as colunas sucessivas de $P$.

## Exemplo 02

Encontre uma mudança de variáveis ortogonal que elimine os termos mistos da *FQ* $Q = x_1^2 - x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_2x_3$, e expresse $Q$ em termos das novas variáveis.

# Mudanças de Variáveis em Formas Quadráticas



$$Q = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$$

$$
\begin{aligned}
Q &= \mathbf{x}^T A \mathbf{x} \\
Q &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Equação Característica:

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & 0 \\ -2 & \lambda & 2 \\ 0 & 2 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = 0$$

Equação Característica:

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & 0 \\ -2 & \lambda & 2 \\ 0 & 2 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^3 - 9\lambda = 0$$

Equação Característica:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & 0 \\ -2 & \lambda & 2 \\ 0 & 2 & \lambda + 1 \end{vmatrix} &= 0 \\ \lambda^3 - 9\lambda &= 0 \\ \lambda(\lambda + 3)(\lambda - 3) &= 0 \end{aligned}$$

Equação Característica:

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & 0 \\ -2 & \lambda & 2 \\ 0 & 2 & \lambda + 1 \end{vmatrix} &= 0 \\
\lambda^3 - 9\lambda &= 0 \\
\lambda(\lambda + 3)(\lambda - 3) &= 0
\end{aligned}$$

Logo, os autovalores são: $\lambda = 0$, $\lambda = -3$ e $\lambda = 3$

Calculando os autovetores, temos:

p/ $\lambda = 0$ : $\begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$ p/ $\lambda = -3$ : $\begin{bmatrix} \frac{-1}{3} \\ \frac{-2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$ p/ $\lambda = 3$: $\begin{bmatrix} \frac{-2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

A substituição $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ que elimina os termos mistos é:

$$x = Py$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

# Mudanças de Variáveis em Formas Quadráticas



Isso produz a nova forma quadrática:

$$Q = \mathbf{y}^T(P^TAP)\mathbf{y}$$

# Mudanças de Variáveis em Formas Quadráticas



Isso produz a nova forma quadrática:

$$
\begin{aligned}
Q &= \mathbf{y}^T(P^TAP)\mathbf{y} \\
Q &= \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

# Mudanças de Variáveis em Formas Quadráticas



Isso produz a nova forma quadrática:

$$\begin{aligned} Q &= \mathbf{y}^T(P^TAP)\mathbf{y} \\ Q &= \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \\ Q &= -3y_2^2 + 3y_3^2 \end{aligned} \tag{11}$$

Isso produz a nova forma quadrática:

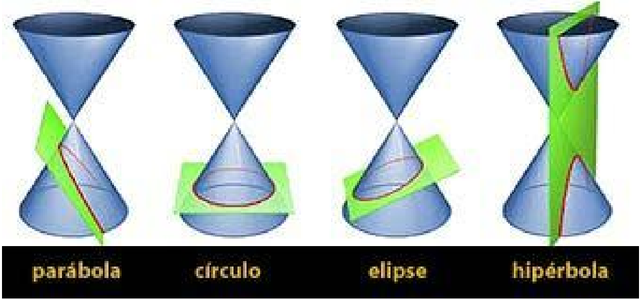
$$\begin{aligned} Q &= \mathbf{y}^T(P^TAP)\mathbf{y} \\ Q &= \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \\ Q &= -3y_2^2 + 3y_3^2 \end{aligned} \qquad (11)$$

Compare a equação inicial com o resultado
$Q = x_1^2 - x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_2x_3$
Em (11) não há termos mistos.

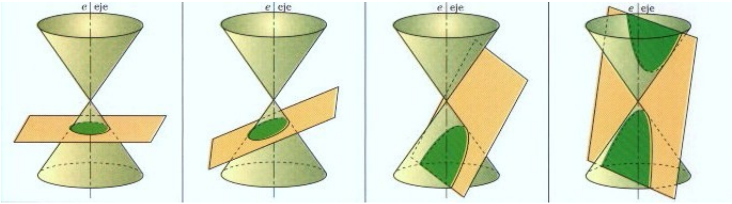
# Formas Quadráticas na Geometria

Uma **Seção Cônica** é uma curva obtida cortando um cone circular reto por um plano.

Uma **Seção Cônica** é uma curva obtida cortando um cone circular reto por um plano.



Uma **Seção Cônica** é uma curva obtida cortando um cone circular reto por um plano.



# Formas Quadráticas na Geometria



Uma equação pode ser da forma:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \quad (12)$$

# Formas Quadráticas na Geometria



Uma equação pode ser da forma:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \quad (12)$$

Se $d = e = f = 0$, então (12) se reduz a:

# Formas Quadráticas na Geometria



Uma equação pode ser da forma:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \quad (12)$$

Se $d = e = f = 0$, então (12) se reduz a:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0 \quad (13)$$

Uma equação pode ser da forma:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \quad (12)$$

Se $d = e = f = 0$, então (12) se reduz a:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0 \quad (13)$$

Denominada de **Cônica Central** ou **Reduzida.**

Se em (13) $f \neq 0$, então podemos dividir tudo por $f$ e reescrever a equação na forma:

$$a' x^2 + b' y^2 = 1 \qquad (14)$$

Se em (13) $f \neq 0$, então podemos dividir tudo por $f$ e reescrever a equação na forma:

$$a^{'}x^2 + b^{'}y^2 = 1 \tag{14}$$

Podemos escolher valores para $a^{'}$ e $b^{'}$ de tal forma a obtermos uma das cônicas citadas acima.

**Elipse**:

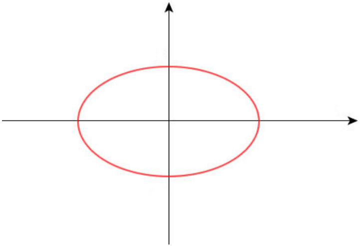
$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \tag{15}$$

$$\alpha \geq \beta > 0$$

**Elipse**:

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \tag{15}$$

$$\alpha \geq \beta > 0$$



**Elipse**:

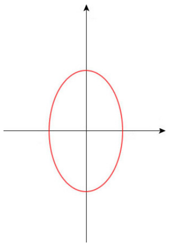
$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \tag{16}$$

$$\beta \geq \alpha > 0$$

**Elipse**:

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \tag{16}$$

$$\beta \geq \alpha > 0$$



**Hipérbole**:

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \tag{17}$$

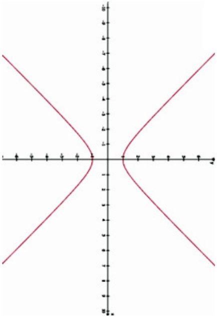
$$\alpha > 0 \quad \beta > 0$$

Formas Quadráticas
Egmon Pereira
Definição
Exemplo 01
Mudanças de Variáveis
Teorema 01
Exemplo 02
Formas Quadráticas na Geometria
Identificando Seções Cônicas
Exemplo 03
Formas Quadráticas
Teorema 02
Teorema 03
FIM

**Hipérbole**:

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \tag{17}$$

$$\alpha > 0 \quad \beta > 0$$



**Hipérbole**:

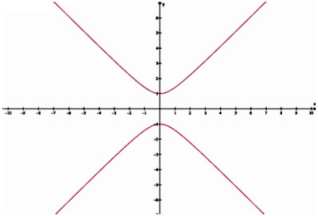
$$\frac{y^2}{\beta^2} - \frac{x^2}{\alpha^2} = 1 \tag{18}$$

$$\alpha > 0 \quad \beta > 0$$

**Hipérbole**:

$$\frac{y^2}{\beta^2} - \frac{x^2}{\alpha^2} = 1 \qquad (18)$$

$$\alpha > 0 \quad \beta > 0$$



# Identificando Seções Cônicas



Resolvendo o problema 1, ou seja, identificar a curva representada pela equação $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = k$ em duas ou três variáveis.

# Identificando Seções Cônicas



Resolvendo o problema 1, ou seja, identificar a curva representada pela equação $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = k$ em duas ou três variáveis.

Para encontrar uma rotação que elimine os termos mistos da equação

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + f = 0$$

# Identificando Seções Cônicas



Resolvendo o problema 1, ou seja, identificar a curva representada pela equação $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = k$ em duas ou três variáveis.
Para encontrar uma rotação que elimine os termos mistos da equação

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + f = 0$$

É conveniente passar o termo constante para o lado direito:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = k$$

# Identificando Seções Cônicas



Em notação matricial, temos:

$$x^T A x = k$$

# Identificando Seções Cônicas





Em notação matricial, temos:

$$\begin{aligned} x^T A x &= k \\ x^T A x &= \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

# Identificando Seções Cônicas



Em notação matricial, temos:

$$
\begin{aligned}
x^T A x &= k \\
x^T A x &= \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\
k &= \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad (19)
\end{aligned}
$$

Para girar os eixos coordenados, precisamos fazer uma mudança de variáveis ortogonal:

$$\mathbf{x} = Px'$$

Na qual $det(P) = 1$

# Identificando Seções Cônicas



Para girar os eixos coordenados, precisamos fazer uma mudança de variáveis ortogonal:

$$\mathbf{x} = Px'$$

Na qual $det(P) = 1$

Para acharmos o ângulo de rotação, faremos:

$$p = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{20}$$

## Exemplo 03

a) Identifique a cônica de equação $5x^2 - 4xy + 8y^2 - 36 = 0$ girando os eixos $xy$ até colocar a cônica em posição canônica.

# Identificando Seções Cônicas



## Exemplo 03

a) Identifique a cônica de equação $5x^2 - 4xy + 8y^2 - 36 = 0$ girando os eixos $xy$ até colocar a cônica em posição canônica.

b) Encontre o ângulo $\theta$ pelo qual foram girados os eixos $xy$ na parte $a$.

A equação dada pode ser escrita na forma matricial:

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = 36$$

A equação dada pode ser escrita na forma matricial:

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = 36$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$$

O polinômio característico de A é:

$$\begin{vmatrix} \lambda - 5 & 2 \\ 2 & \lambda - 8 \end{vmatrix} = (\lambda - 4)(\lambda - 9)$$

# Identificando Seções Cônicas



O polinômio característico de A é:

$$\begin{vmatrix} \lambda - 5 & 2 \\ 2 & \lambda - 8 \end{vmatrix} = (\lambda - 4)(\lambda - 9)$$

Logo, os autovalores são: $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = 9$

E portanto, após breve e simples cálculos, temos os autovalores:

E portanto, após breve e simples cálculos, temos os autovalores:

$$p/\lambda = 4: \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \qquad p/\lambda = 9: \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

# Identificando Seções Cônicas



Assim, $A$ é ortogonalmente diagonalizável por:

Assim, $A$ é ortogonalmente diagonalizável por:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \tag{21}$$

# Identificando Seções Cônicas





Observe que o $det(P) = 1$, logo:

Observe que o $det(P) = 1$, logo:

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = 36$$

Que pode ser reescrito como:

Que pode ser reescrito como:

$$4x'^2 + 9y'^2 = 36$$

Que pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned} 4x'^2 + 9y'^2 &= 36 \\ \frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{4} &= 1 \end{aligned}$$

Para resolver $b$, temos:

Para resolver $b$, temos:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

# Identificando Seções Cônicas



Para resolver $b$, temos:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Sendo assim, temos:

$$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

# Identificando Seções Cônicas



Sendo assim, temos:

$$\begin{aligned} \sin\theta &= \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \cos\theta &= \frac{2}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

# Identificando Seções Cônicas



Sendo assim, temos:

$$\begin{aligned} \sin\theta &= \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \cos\theta &= \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Sendo assim, temos:

$$\begin{aligned} \sin\theta &= \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \cos\theta &= \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} &= \frac{1}{2} \\ \theta &= \arctan\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Sendo assim, temos:

$$\begin{aligned}
\sin\theta &= \frac{1}{\sqrt{5}} \\
\cos\theta &= \frac{2}{\sqrt{5}} \\
\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} &= \frac{1}{2} \\
\theta &= \arctan\frac{1}{2} \\
\theta &\approx 26,6^{o}
\end{aligned}$$

# Formas Quadráticas Positivas Definidas



## O 2º Problema

Agora vamos considerar o segundo dos três problemas propostos acima. Vamos determinar as condições sob as quais $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} > 0$ para quaisquer valores não nulos de $\mathbf{x}$.

## Teorema 02

Uma Forma Quadrática $\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ é dita:

# Formas Quadráticas Positivas Definidas



## Teorema 02

Uma Forma Quadrática $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ é dita:

- **Positiva definida** se $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} > 0$ para qualquer $\mathbf{x} \neq 0$

**Teorema 02**

Uma Forma Quadrática $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ é dita:

- **Positiva definida** se $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} > 0$ para qualquer $\mathbf{x} \neq 0$
- **Negativa definida** se $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} < 0$ para qualquer $\mathbf{x} \neq 0$

# Formas Quadráticas Positivas Definidas



## Teorema 02

Uma Forma Quadrática $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ é dita:

- **Positiva definida** se $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} > 0$ para qualquer $\mathbf{x} \neq 0$
- **Negativa definida** se $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} < 0$ para qualquer $\mathbf{x} \neq 0$
- **Indefinida** se $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ tem valores tanto positivos quanto negativos.

### Teorema 03

Se $A$ é uma matriz simétrica, então:

**Teorema 03**

Se $A$ é uma matriz simétrica, então:

(a) $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ é positiva definida $<=>$ todos os autovalores de $A$ são positivos

**Teorema 03**

Se $A$ é uma matriz simétrica, então:

(a) $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ é positiva definida $<=>$ todos os autovalores de $A$ são positivos

(b) $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ é negativa definida $<=>$ todos os autovalores de $A$ são negativos

# Formas Quadráticas Positivas Definidas

**Teorema 03**

Se $A$ é uma matriz simétrica, então:

(a) $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ é positiva definida <=> todos os autovalores de $A$ são positivos

(b) $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ é negativa definida <=> todos os autovalores de $A$ são negativos

(c) $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ é indefinida <=> $A$ tem pelo menos um autovalor positivo e pelo menos um autovalor negativo.

Orientadora: Prof. Lilian Givisiez

Álgebra Linear

www.egmon.com.br