1. **Formfaktor und mittlerer quadratischer Radius von Nukleonen mit kugelsymmetrischer Ladungsverteilung**
Betrachten Sie einen Kern mit kugelsymmetrischer Ladungsverteilung $f(r) = \frac{1}{Z \cdot e} \cdot \rho(r)$. Zeigen Sie,

(a) dass der Formfaktor gegeben ist durch

$$F(q) = \frac{4\pi\hbar}{Zeq} \int \rho(r) \sin\left(\frac{qr}{\hbar}\right) r \, \mathrm{d}r$$

Berechnen Sie hierzu $F(\vec{\mathbf{q}}) = \int f(\vec{\mathbf{r}}) e^{i\vec{\mathbf{q}}\vec{\mathbf{r}}/\hbar} \, \mathrm{d}V$ ohne Benutzung einer Taylorreihe.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\cos\vartheta}{\mathrm{d}\vartheta} &= -\sin\vartheta \Leftrightarrow \mathrm{d}\vartheta = -\frac{\mathrm{d}\cos\vartheta}{\sin\vartheta} \\
\Rightarrow F(q) &= -\frac{1}{Ze} \int \rho(r) \, e^{iqr\cos\vartheta/\hbar} r^2 \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}\cos\vartheta \, \mathrm{d}r \\
&= -\frac{2\pi}{Ze} \int \rho(r) \, r^2 \frac{\hbar}{iqr} \left[e^{iqr\cos\vartheta/\hbar} \right]_0^\pi \mathrm{d}r \\
&= -\frac{2\pi\hbar}{iqZe} \int \rho(r) \, r \left(\underbrace{e^{-iqr/\hbar} - e^{iqr/\hbar}}_{-2i\sin\left(\frac{qr}{\hbar}\right)} \right) \mathrm{d}r \\
&= \frac{4\pi\hbar}{Zeq} \int \rho(r) \sin\left(\frac{qr}{\hbar}\right) r \, \mathrm{d}r
\end{aligned}$$

(b) dass die Ableitung $\mathrm{d}F(q) \big/ \mathrm{d}q^2$ für $q = 0$ gegeben ist durch

$$\left. \frac{\mathrm{d}F(q)}{\mathrm{d}q^2} \right|_{q=0} = -\frac{\left\langle r^2 \right\rangle}{6\hbar^2}.$$

Tipp: Entwickeln Sie das Ergebnis aus Aufgabe 1a) um $q = 0$.

$$\begin{aligned}
\sin x &\approx x - \frac{x^3}{3!} \\
\Rightarrow F(q) &= \frac{4\pi\hbar}{Zeq} \int \rho(r) \, r \left(\frac{qr}{\hbar} - \frac{q^3 r^3}{6\hbar^3} \right) \mathrm{d}r \\
&= \frac{4\pi\hbar}{Zeq} \left(\int \rho(r) \, \frac{qr^2}{\hbar} \, \mathrm{d}r - \int \rho(r) \, \frac{q^3 r^4}{6\hbar^3} \, \mathrm{d}r \right) \\
\frac{\mathrm{d}F(q)}{\mathrm{d}q^2} &= -\frac{4\pi\hbar}{Ze} \frac{1}{6\hbar^3} \int \rho(r) \, r^4 \, \mathrm{d}r \\
&= -\frac{1}{6\hbar^2} 4\pi \int r^2 \underbrace{\frac{1}{Ze} \rho(r)}_{=f(r)} r^2 \, \mathrm{d}r \\
&= -\frac{1}{6\hbar^2} \int r^2 f(r) \, \mathrm{d}V \\
&= -\frac{\left\langle r^2 \right\rangle}{6\hbar^2}
\end{aligned}$$

(c) In der Präsenzaufgabe hatten Sie gezeigt, dass der mittlere quadratische Radius $\left\langle r^2 \right\rangle$ eines Kerns mit gaußförmiger Ladungsverteilung durch $3/a^2$ gegeben ist. Berechnen Sie $\left\langle r^2 \right\rangle$ erneut mit Hilfe von aufgabe 1b), d.h. ausgehend von der Steigung des Formfaktors

$$F(q) = \exp\left(-\frac{q^2}{2a^2\hbar^2} \right)$$

bei $q = 0$.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}F(q)}{\mathrm{d}q^2} &= -\frac{1}{2a^2\hbar^2} \cdot F(q) \\
\left\langle r^2 \right\rangle &= -6\hbar^2 \cdot \frac{\mathrm{d}F(q)}{\mathrm{d}q^2} \\
&= -6\hbar^2 \cdot \frac{-1}{2a^2\hbar^2} \exp\left[-\frac{q^2}{2a^2\hbar^2} \right] \Bigg|_{q=0} \\
&= \frac{3}{a^2}
\end{aligned}$$

2. **Formfaktor: Elektronenstreuung an Goldkernen**
   Elektronen der Energie $E = 500\,\mathrm{MeV}$ werden an Gold-Kernen gestreut.

   (a) Berechnen Sie den Formfaktor des Gold-Kerns ausgehen von Aufgabe 1a). Nehmen Sie hierzu an, dass der Kern einer homogen geladenen Kugel mit Radius R entspricht.

$$\begin{aligned}
\rho(r) &= \frac{Ze}{\frac{4}{3}\pi R^3} \\
F(q) &= \frac{4\pi\hbar}{Zeq}\int_0^R \frac{Ze}{\frac{4}{3}\pi R^3}\, r\sin\left(\frac{qr}{\hbar}\right)\mathrm{d}r \\
&= \frac{3\hbar}{qR^3}\left(\left[-\frac{\hbar}{q}\cos\left(\frac{qr}{\hbar}\right)r\right]_0^R + \frac{\hbar}{q}\int_0^R \cos\left(\frac{qr}{\hbar}\right)\mathrm{d}r\right) \\
&= \frac{3}{R^3}\frac{\hbar^3}{q^3}\left(\left[-\frac{\hbar}{q}\cos\left(\frac{qr}{\hbar}\right)r\right]_0^R + \left[\sin\left(\frac{qr}{\hbar}\right)\right]_0^R\right) \\
&= \frac{3}{R^3}\frac{\hbar^3}{q^3}\left(\sin\left(\frac{qR}{\hbar}\right) - \frac{qR}{\hbar}\cos\left(\frac{qR}{\hbar}\right)\right)
\end{aligned}$$

   (b) Berechnen Sie den maximalen Wer für $\alpha = \frac{|q|R}{\hbar}$!
   Hinweis: Verwenden Sie für den Kernradius die in der Vorlesung angegebene Näherungsformel $R \approx 1{,}2\,\mathrm{fm}\sqrt[3]{A}$.

$$\begin{aligned}
|q| = |\vec{\mathbf{p}} - \vec{\mathbf{p}}'| &\Leftrightarrow q_{\max} = 2p \\
\alpha_{\max} &= \frac{2p\cdot 1{,}2\,\mathrm{fm}\sqrt[3]{A}}{\hbar} \\
&= \frac{1000\,\mathrm{MeV/c}\cdot 1{,}2\,\mathrm{fm}\sqrt[3]{197}}{197\,\mathrm{MeV/c}} = 35{,}53
\end{aligned}$$

   (c) Wieviele Minima würde man in der Winkelverteilung sehen, wenn man nukleare Wechselwirkungen vernachlässigt?
   Hinweis: Der Wirkungsquerschnitt ist proportional zu $|F(q)|^2$, d.h. die Nullstellen von $F(q)$ bestimmen die Lage der Minima in der Winkelverteilung.

$$\begin{aligned}
|F(q)|^2 &\overset{!}{=} 0 \\
\Leftrightarrow \sin\left(\frac{qR}{\hbar}\right) - \underbrace{\frac{qR}{\hbar}}_{:=\alpha}\cos\left(\frac{qR}{\hbar}\right) &\overset{!}{=} 0 \\
\sin\alpha &= \alpha\cos\alpha \\
\Leftrightarrow \alpha &= \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha \\
\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi &\le \alpha_{\max} = 35{,}53 \\
\Rightarrow n &= 10
\end{aligned}$$

3. **Kinematik der Elektron-Nukleon-Streuung**
   Ein Elektron der Energie $E = 25\,\mathrm{GeV}$ wird an einem ruhenden Proton um einen Winkel $\theta = 10°$ gestreut. Die Elektronenmasse soll vernachlässigt werden.

   - Elastische Streuung:

     (a) Skizzieren Sie das Diagramm des Streuprozesses mit einlaufenden, auslaufenden und ausgetauschen Teilchen. Definieren Sie die zugehörigen Viererimpulse (mit Impulsvektoren) in der Skizze.

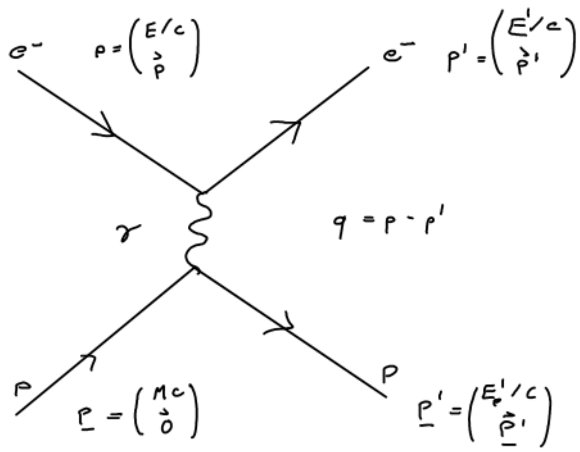

Abbildung 1: Elastische Streuung im Ruhesystem des Protons

     (b) Zeigen Sie, dass bei der elastischen Streuung die Energie des gestreuten Elektrons durch $E' = E/\left[1 + \frac{E}{m_p c^2}(1-\cos\theta)\right]$ gegeben ist (Protonmasse $m_p = 938\,\mathrm{MeV/c^2}$).
     Berechnen Sie E' und mit Herleitung den Viererimpulsübertrag Q^2.
     Wie groß ist die Bjorkensche Skalenvariable x?

$$
\begin{aligned}
p + P &= p' + P' \\
\Leftrightarrow (p+P)^2 &= (p'+P')^2 \\
\Leftrightarrow p^2 + 2pP + P^2 &= p'^2 + 2p'P' + P'^2 \\
\Rightarrow pP &= p'P'
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Leftrightarrow EM &= p'(P + p - p') = E'M + \frac{EE'}{c^2}(1-\cos\theta) - m_e^2 c^2 \\
\overset{m_e \approx 0}{\Leftrightarrow} E' &= \frac{E}{1 + \frac{E}{Mc^2}(1-\cos\theta)} = 17{,}8\,\mathrm{GeV}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Q^2 = -q^2 = -(p-p')^2 &= -2m_e^2c^2 + 2\frac{EE'}{c^2}(1-\cos\theta) \\
&\approx 2\frac{EE'}{c^2}(1-\cos\theta) = 13{,}5\,\frac{\mathrm{GeV}}{\mathrm{c}}
\end{aligned}
$$

$$
x = \frac{Q^2}{2M(E-E')} \approx 1
$$

- Inelastische Streuung:
  (a) Skizzieren Sie das Diagramm des Streuprozesses und kennzeichnen Sie das erzeugte hadronische System in der Skizze. Definieren Sie den Veiererimpuls des hadronischen Systems.

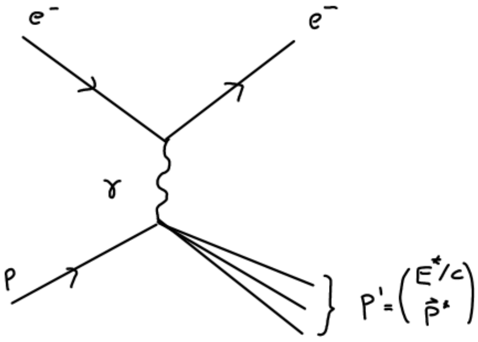

Abbildung 2: Inelastische Streuung im Ruhesystem des Protons

  (b) Die Energie des gestreuten Elektrons sei $E' = 10\,\mathrm{GeV}$.
  Berechnen Sie Q^2 und mit Herleitung die invariante Masse des hadronischen Systems.
  Berechnen Sie die Bjorkensche Skalenvariable x.

$$Q^2 = \frac{2EE'}{c^2}(1-\cos\theta) = 7{,}6\,\frac{\mathrm{GeV}}{\mathrm{c}^2}$$

$$Wc := \sqrt{p'^2} = \sqrt{\left(\frac{E^*}{c}\right)^2 - (\vec{\mathbf{p}}^*)^2}$$

$$W^2c^2 = p'^2 = (p+q)^2 = m_p^2c^2 - Q^2 + 2m_p(E-E')$$

$$\Rightarrow W = 4{,}63\,\frac{\mathrm{GeV}}{\mathrm{c}}$$

$$x = \frac{Q^2}{2M(E-E')} = 0{,}270$$